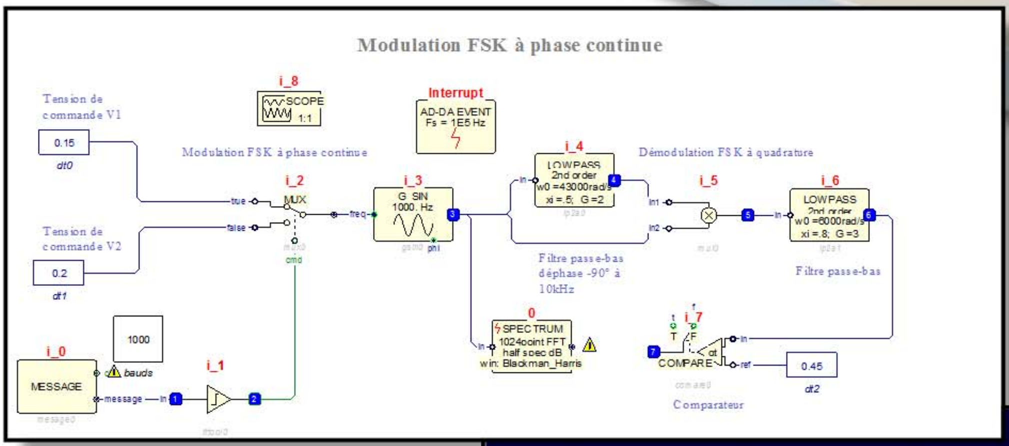
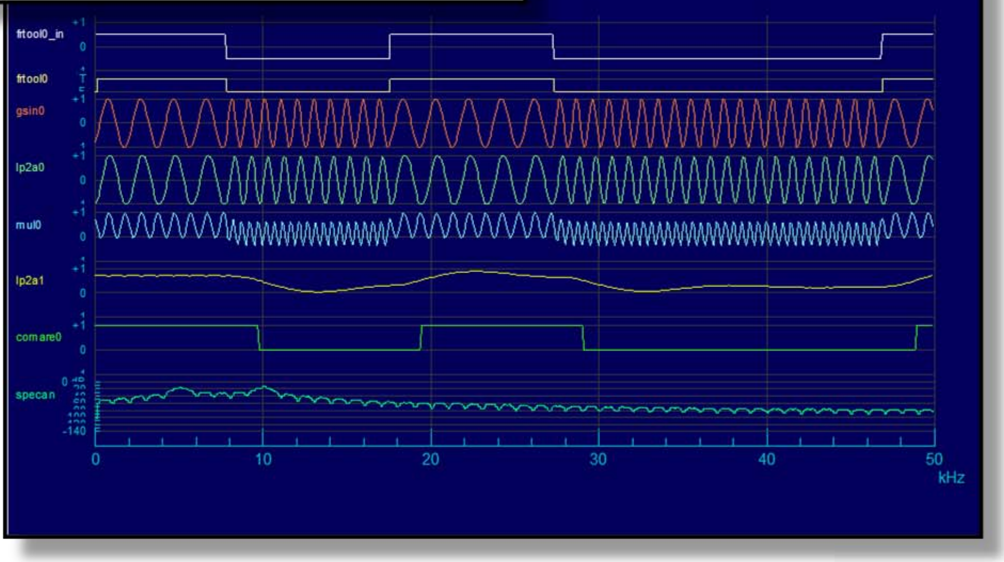
Traitement du signal

Niveau V à VII CITE 2011, BTS/DUT/Licence/Master.





Sujets et comptes rendus

Auteur : N'Gally KOMA
Professeur en BTS électronique

Z.A. La Clef St Pierre - 5, rue du Groupe Manoukian 78990 ELANCOURT France
Tél. : 33 (0)1 30 66 08 88 - Télécopieur : 33 (0)1 30 66 72 20
e-mail : ge@didalab.fr - Web : www.didalab.fr

Réf : ETD 410 040

SOMMAIRE

TP 4
ECHANTILLONNAGE : THEOREME DE NYQUIST-SHANON

4.1 BUT

Prélever à des instants le plus souvent réguliers, les valeurs [illegible]ses [illegible] signal pour plusieurs types de traitement ; exemples :

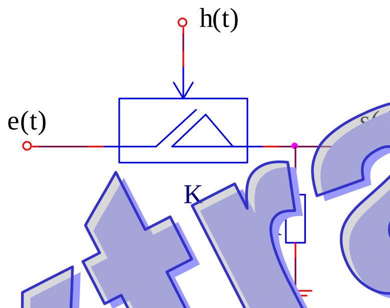
1- Transmission filaire ou radio, multiplexage temporel, puis [illegible]item[illegible]nalogique,
2- Traitement numérique (éventuellement suivi d'u[illegible]titu[illegible]u sig[illegible] analogique) nécessitant de maintenir constante [illegible] val[illegible] les [illegible]ntillo[illegible] durant leur conversion en information numéri[illegible] pour [illegible] t d[illegible]nctions :
    - échantillonneur-bloq[illegible] u s[illegible]le/hol[illegible]
    - conversion analogi[illegible]u[illegible]ériq[illegible]AN,
    - tr[illegible]ment num[illegible]ue : [illegible]lateu[illegible] DSP
    - [illegible]version [illegible]ue-ana[illegible]e si besoin.

Dans tou[illegible] de figur[illegible] fa[illegible] assurer que le signal traité n'est pas fondamen[illegible]ment altéré p[illegible] l'opération échantillonnage :

- p[illegible] d'informations
- pa[illegible] modification du spectre c'est-à-dire pas d'informations rajoutées

4.2 SCHEMA DE PRINCIPE DE L'ECHANTILLONNAGE

Le schéma de la fonction échantillonnage est donné figure 1.



e(t) : sig[illegible]trée
h(t) : [illegible] d'échantil[illegible] Le sig[illegible](t) rectangulaire est défini ainsi :

$$h(t) = \ Hpour\ 0 < t \leq \tau$$
$$h(t)\ \ = 0 \quad\ pour\, \tau < t < Ts$$

s(t) : signal d[illegible] sortie
K : interrupteur commandé par h(t) supposé parfait.

4.3 FONCTIONNEMENT

Le signal h(t) a 2 états : un état haut et un état bas.

a) h(t) est dans un état (exemple état haut), K est fermé donc s(t) = e(t)
b) h(t) est dans l'autre état (état bas), K est ouvert, s(t) = 0.

Considérons h(t) comme un signal d'amplitude 1 ou 0.
Le fonctionnement peut être assimilé à une **opération multiplication voir les TP modulation :**

$$\boldsymbol{s(t) = k.h(t).e(t)}$$

Unité de k : $[V]^{-1}$

Si l'amplitude de h(t) vaut 1 alors le module k sera égal à 1.
L'expression de s(t) sera déterminée à partir de la déco[illegible]ion [illegible]érie [illegible]urier de h(t).

Si h(t) est un signal périodique de pé[illegible] T_e [illegible] figur[illegible] il [illegible] être décomposé en série de Fourier.

$$T_s \;\text{[illegible]}\; 1 \;\text{[illegible]}\; = \;\text{[illegible]}\; \omega_s$$

$$\text{[illegible]}(t) = \;\text{[illegible]}\; [\;\text{[illegible]}s(n\omega_s t) + b_n \sin(n\omega_s t)]$$

Le signal h(t) pe[illegible]is sous la forme :

$$h(t) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \cos\left(n\omega_s t - \varphi_n\right) équation\ (a)$$

$$avec :$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\ \ et\ \ \varphi_n = Arctan(\frac{b_n}{a_n})$$

$$A_0 = \alpha$$

QUESTION :

Déterminer l'e[illegible]sion d[illegible]s c[illegible]icien[illegible] la se[illegible]de Fourier ;

REPONS[illegible]

Pour n varian[illegible]0 à l'i[illegible]ni, [illegible]s coefficients de la série sont calculés comme suit :

$$\boldsymbol{a_0 = \frac{1}{T_s}\int_0^{T_s} h(t)dt = H\frac{\tau}{T_s} = \alpha}$$

$$\alpha estlerapportcycliquedeh(t)$$

$$a_n = \frac{2}{T_s}\int_0^{T_s} h(t)\cos(n\omega_s t)\,dt\ b_n = \frac{2}{T_s}\int_0^{T_s} h(t)\sin(n\omega_s t)\,dt$$

$$a_n = \frac{2}{T_s}\int_0^{\tau} \cos(n\omega_s t)\,dt = \frac{2}{n\omega_s T_s}[sin(n\omega_s t)]_0^{\tau}$$

$$b_n = \frac{2}{T_s}\int_0^{\tau} \sin(n\omega_s t)\,dt = \frac{2}{n\omega_s T_s}[-cos(n\omega_s t)]_0^{\tau}$$

$$a_n = \frac{2}{nT_s\omega_s} sin(n\omega_s \tau)$$
$$b_n = \frac{2}{nT_s\omega_s}(1 - cos(n\omega_s \tau))$$

[illegible] $= 2$ [illegible]

Cela donne [illegible] les coefficie[illegible] expres[illegible] suivantes :

[illegible] $\frac{}{n\pi}\sin(2n\pi\frac{\tau}{T_s}) = \frac{1}{n\pi}\sin(2n\pi\alpha)$

$$b_n = \frac{1}{n\pi}(1 - \cos(2n\pi\frac{\tau}{T_s})) = \frac{1}{n\pi}(1 - \cos(2n\pi\alpha))$$

Soit A_n l’amplitude des raies du spectre de h(t).

a) Si α est égal à 0,5 les coefficients a_n sont nuls.
Seuls restent les coefficients b_n : le fondamental F_s et les ha[illegible]niq[illegible]paires de la forme $nF_s = (2p+1)F_s$; leur amplitude A_{2p+1} est donnée pa[illegible] rel[illegible]

$\boldsymbol{b_n = A_{2p+1} = \frac{2}{(2p}}$ [illegible]

b) Si α est quelconque le fondamen[illegible]us[illegible]harm[illegible] présents et ont pour amplitude An telle que [illegible]

A_n^2 [illegible] $^2 + b$ [illegible]

[illegible] $= \frac{1}{(n\pi}$ [illegible] $\pi\alpha) + (1 - \cos(2n\pi\alpha)^2)$

[illegible] $\frac{1}{}$ [illegible] $\sin^2(2n\pi\alpha) + \cos^2(2n\pi\alpha) - 2\cos(2n\pi\alpha))$

Cela donne :

$$A_n^2 = \frac{2}{(n\pi)^2}(1 - \cos(2n\pi\alpha))$$
$$Or$$
$$1 - \cos(2n\pi\alpha) = 2sin^2(n\alpha\pi)$$

$$Donc$$

$$A_n^2 = \frac{2}{(n\pi)^2} 2sin^2(n\alpha\pi) = \frac{4}{(n\pi)^2} sin^2(n\alpha\pi)$$

$$A_n^2 = \frac{4}{(n\pi)^2} sin^2(n\alpha\pi)$$

$$A_n = \frac{2}{n\pi} \sin(n\alpha\pi)$$

En multipliant par $\frac{\alpha}{\alpha}$, on obtient ;

$$\boldsymbol{A_n = 2\alpha\frac{\sin(n\alpha\pi)}{n\alpha\pi}}$$

Exemple : ampl[illegible](t) = [illegible]

Coeffi[illegible] en fonct[illegible] de [illegible] pour le fondamental (n = 1)

α	0,[illegible]	[illegible]	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$2\alpha\frac{sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi}$	0,1967	0,3742	0,5150	0,6055	0,6366	0,6055	0,5150	0,3742	0,1967

Coefficients A_n en fonction de n pour α = 1

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$2\alpha\frac{sin(n\alpha\pi)}{n\alpha\pi}$	0,6055	0,1871	0,1247	0,1514	0,0000	0,1009	0,0535	[illegible]	[illegible]

Remarque :

L'amplitude des raies est nulle pour n[illegible]tier [illegible]n(nα[illegible]n(kπ) = 0

4.4 EXPRESSIO[illegible] SIGNAL E[illegible]TILL[illegible]E s(t)

Pour simplifier les [illegible]s, on [illegible]a que e(t) est un signal sinusoïdal pure de pulsation ω (et donc [illegible] f = ω/2π).

A partir du théorème de superposition le calcul peut s'appliquer à n'importe quel signal.

$$e(t) = E_m sin\omega t = E_m sin2\pi ft$$

$$s(t) = e(t).h(t)$$

QUESTION

1- *Déterminer l'expression du signal échantillonné*
2- *Montrer que son spectre est composé de la fréquence f et d'une infinité de raies de fréquences* $nf_s \pm f$ *pour n variant de 1 à l'infini.*

REPONSE

1- Posons : $\omega_s = 2\pi f_s$

$$s(t) = \sum_{n=0}^{n=\infty} (E_m sin\omega t) A_n \cos(n\omega_s t - \varphi_n)$$

$$s(t) = E_m \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \, sin \text{[illegible]} \cos(\text{[illegible]} - \varphi_n)$$

$$s(\text{[illegible]} {}_m sin \text{[illegible]} A_n sin \text{[illegible]} os(\text{[illegible]} \omega_s t - \varphi_n)$$

En posant ω = 2πf et [illegible] 2πf$_s$, on obt[illegible] :

$$s(t) = \alpha E_m sin2\pi ft + \frac{1}{2} \sum_{n=1} A_n [\sin((n2\pi fs + 2\pi f)t - \varphi_n) + \sin((n2\pi fs - 2\pi f)t - \varphi_n)]$$

$$\boxed{\boldsymbol{s(t) = \alpha E_m sin2\pi ft + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n [\sin(2\pi(nfs + f)t - \varphi_n) + \sin(2\pi(nfs - f)t - \varphi_n)]}}$$

2- Nous remarquons que le spectre est composé :
   1- de la fréquence **f**
   2- des fréquences$\boldsymbol{nfs - f}$ **et** $\boldsymbol{nfs + f}$**pour n variant d**[illegible]**nfi**[illegible]

4.5 ECRITURE COMPLEXE DE LA SERI[illegible]FO[illegible]ER : [illegible]RI[illegible]LATERALE

L'expression de la séri[illegible]ourie[illegible]'u[illegible]oncti[illegible]ériod[illegible] f(t), (voir plus haut), de période T et de p[illegible] ω est :

$$\text{[illegible]} a_0 + \sum \text{[illegible]} \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]$$

Posons : $a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$

En exprimant $\cos(n\omega t) + \sin(n\omega t)$ par leur forme complexe, on obtient :

$$u_n = a_n \frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2} + b_n \frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{2j}$$

QUESTION

1- *Déterminer l'expression des coefficients complexes de la série de Fourier :* C_n *et* $C_{-n} = \overline{C_n}$ *(complexe conjugué de* C_n*).*

2- *Trouver les modules de* C_n *et* C_{-n} *en fonction des coefficients* A_n *de la série unilatérale.*

REPONSE

1- En multipliant le numérateur et le dénominateur du terme du second me[illegible] par [illegible]t en mettant les exponentielles en facteur on obtient :

$$u_n = \frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\omega t} + \text{[illegible]}\, n + jb_n \text{[illegible]}\, \omega t$$

Posons :

C [illegible] $\frac{a_n - jb_n}{2}$ et [illegible] $=$ [illegible] ave[illegible]

C_{-} [illegible] $\overline{C_n}$ d[illegible] $nomb$[illegible] $plexesconjugués$.

Cela donne pour u_n la rela[illegible] :

$$\text{[illegible]}_{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{C_n e^{jn\omega t} + C_{-n} e^{-jn\omega t}}$$

Ce donne pour f(t) la relation :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} u_n = a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} [C_n e^{jn\omega t} + C_{-n} e^{-jn\omega t}]$$

Cette expression peut s'écrire sous une autre forme **en faisant varier n d[illegible] à [illegible]** :

$$\boldsymbol{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n e^{jn\omega t}}$$

Reprenons le calcul fait plus haut des coefficie[illegible] a s[illegible] de Fo[illegible] cette fois la série étant sous forme exponentielle. On ob[illegible]

$$a_n = \frac{2}{T}\int_a^{a\text{[illegible]}} \text{[illegible]})\cos(\text{[illegible]}t)\,dt \text{[illegible]} \int^{a+T} f(\text{[illegible]} \frac{\text{[illegible]}\omega t + e^{-n\omega t}}{2} dt(1)$$

$$\boldsymbol{a_n} = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t) \frac{e^{\text{[illegible]}} \text{[illegible]}\, e^{-n\omega t}}{2} dt = \boldsymbol{\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)(e^{n\omega t} + e^{-n\omega t})dt(2)}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} \mathrm{f(t)}\sin(n\omega t)\,dt = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\frac{e^{n\omega t} - e^{-n\omega t}}{2j}dt \qquad (3)$$

$$\boldsymbol{jb_n} = \frac{2j}{T}\int_a^{a+T} f(t)\frac{e^{n\omega t} - e^{-n\omega t}}{2j}dt = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{T}}\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{a+T}} \boldsymbol{f(t)(e^{n\omega t}} - \text{[illegible]} \boldsymbol{n\omega t})$$

L'opération $\frac{(3)-(4)}{2} = \frac{\boldsymbol{an-jbn}}{\mathbf{2}}$ entraîne :

$$C_n = \frac{a_n - jb_n}{2} = \frac{1}{2}\left(\text{[illegible]} \; 2j \; \text{[illegible]} \; {}^{-n\omega t} \; \text{[illegible]}\right) \text{ soit}$$

$$\boldsymbol{C_n} \text{ [illegible] } \int^{\boldsymbol{a+T}} \boldsymbol{f} \text{ [illegible] } {}^{\boldsymbol{n\omega t}}\boldsymbol{dt}$$

De la même manière, l'opération $\frac{(3)+(4)}{2} = \frac{\boldsymbol{an+jbn}}{\mathbf{2}}$ entraîne :

$$\boldsymbol{C_{-n}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{T}}\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{a+T}} \boldsymbol{f(t)e^{n\omega t}dt}$$

En résumé, on aura :

$\boldsymbol{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n e^{jn\omega t}}$

$$\boldsymbol{C_n} = \frac{\boldsymbol{a_n - jb_n}}{\text{[illegible]}} = \frac{\mathbf{1}}{\text{[illegible]}}\int^{\boldsymbol{a+T}} \text{[illegible]} \boldsymbol{e} \text{ [illegible] } \boldsymbol{t}$$

$$\boldsymbol{C_{-n}} \text{ [illegible] } \frac{\text{[illegible]}}{\mathbf{2}} = \frac{\text{[illegible]}}{\boldsymbol{T}}\int^{\boldsymbol{a+T}} \boldsymbol{f(t)e} \text{ [illegible] } {}^{\boldsymbol{n\omega t}}\boldsymbol{dt}$$

$$\text{[illegible]} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{T}}\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{a+T}} \boldsymbol{f(t)dt}$$

2- Calculer le module des composantes du spectre bilatéral de la fonction f(t).

$$|C_n|^2 = \frac{a_n^2 + b_n^2}{4} = A_n^2$$

$$|C_n| = \frac{A}{2}$$

<u>Remarque importante</u>

On co[illegible] que l'[illegible] des [illegible] du spectre bilatéral est la moitié de celle [illegible] pectre unila[illegible]

4.6

4.7 TRAVAUX PRATIQUES

4.7.1 But de la manipulation :

Le but de la manipulation est de mettre en évidence le théorème d[illegible] Nyquist-Shannon

QUESTION

Enoncer le théorème de Nyquist-Shannon.

REPONSE

Théorème de Nyquist-Shannon

On ne [illegible] plus d'information en reconstruisant un signal à partir de ses échantillons si la fréquence d'échantillonnage [illegible] au moins égale à deux fois la fréquence la plus haute contenue [illegible] spectre [illegible] signal échantillonné.

4.7.2 Schéma d'application

Réaliser le schéma d'application de la figure 2.
Cette figure 2 indique les informations définissant les paramètres de l'échantillonnage.
Les figures 3 à 9 permettent de mettre en évidence les calculs effectués dans la partie théorique.

4.7.3 Mise en évidence du théorème Nyquist-Shannon

Les figures 12 à 15 permettent de mettre en évidence le rec[illegible] [illegible]u repliement du signal échantillonné grâce au module edt1.
La figure 16.a permet de faire varier le spectre [illegible] en [illegible]sant sur le module dt1 au moyen de la souris ; observer au même moment [illegible] de spectre sur la figure 16.b.

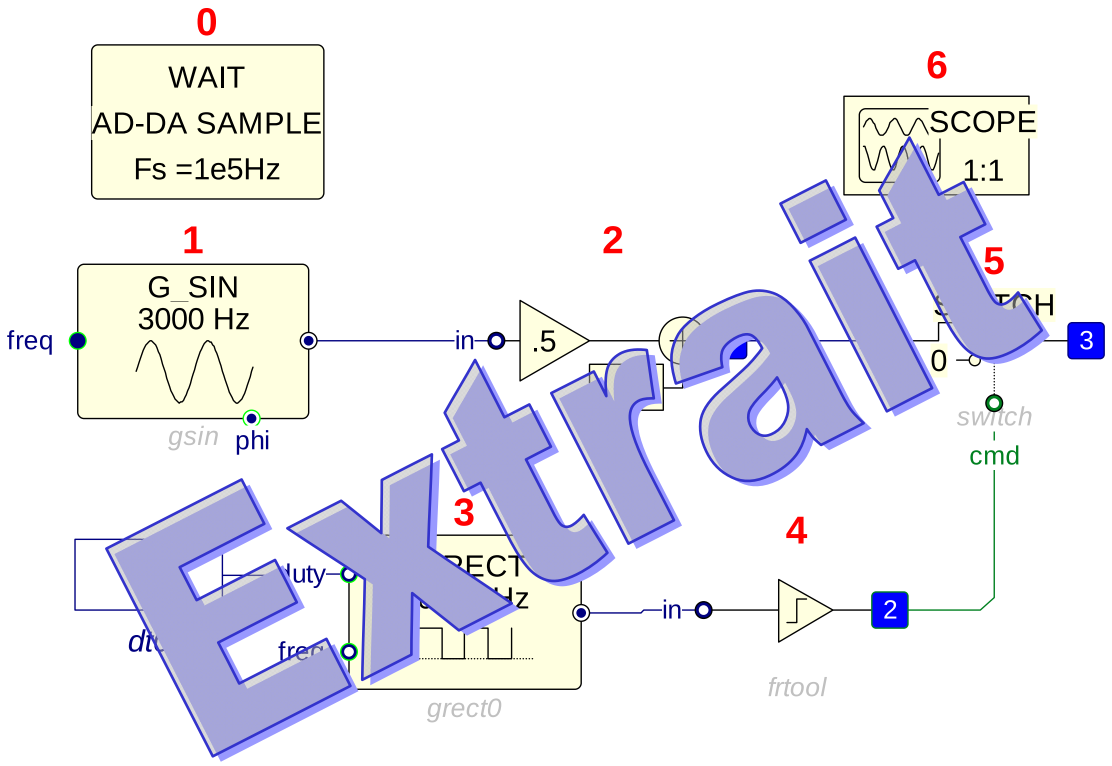

0
WAIT
AD-DA SAMPLE
Fs =1e5Hz
6
SCOPE
1:1
1
G_SIN
3000 Hz
freq
gsin
phi
2
in
.5
5
0
3
switch
cmd
3
RECT
duty
freq
dt
grect0
4
in
2
frtool

fig.2

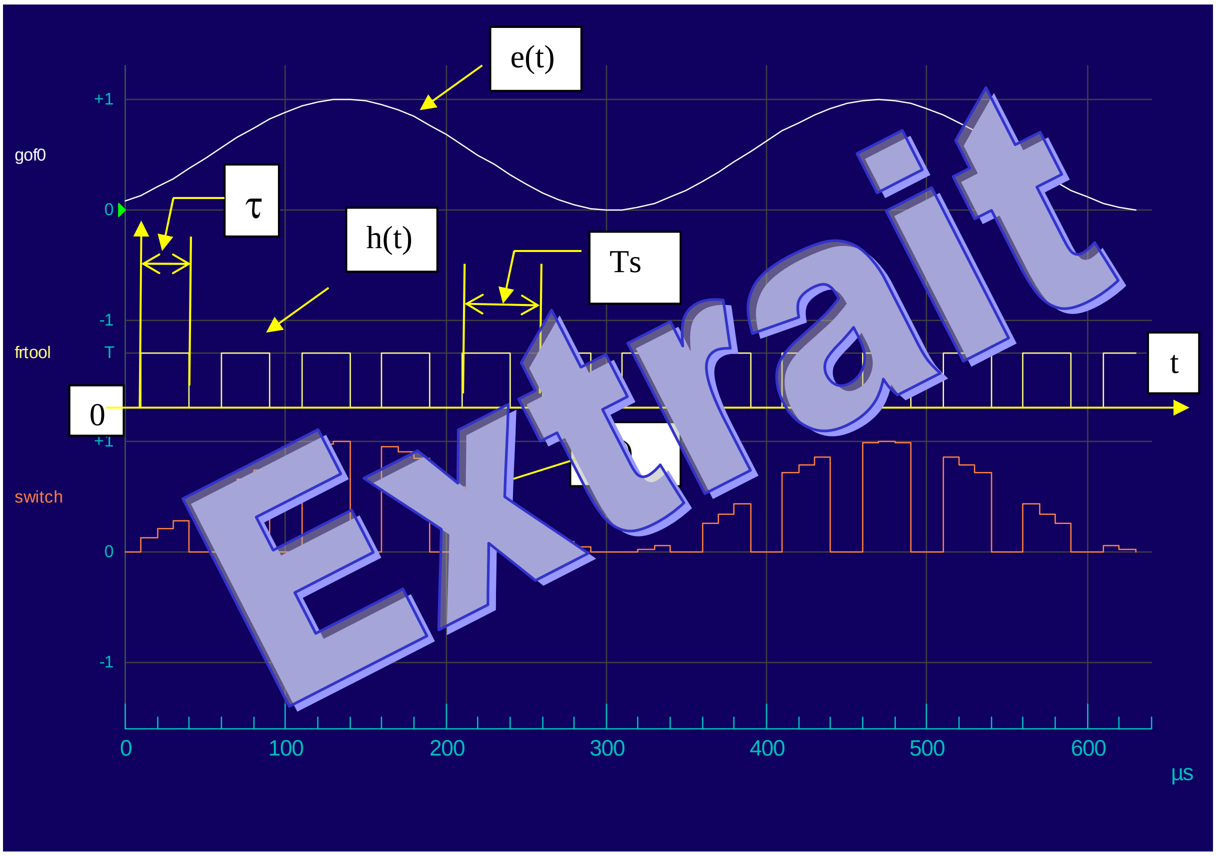

e(t)
+1
gof0
0
τ
h(t)
Ts
-1
frtool
T
t
0
+1
switch
0
-1
0
100
200
300
400
500
600
µs

fig.3

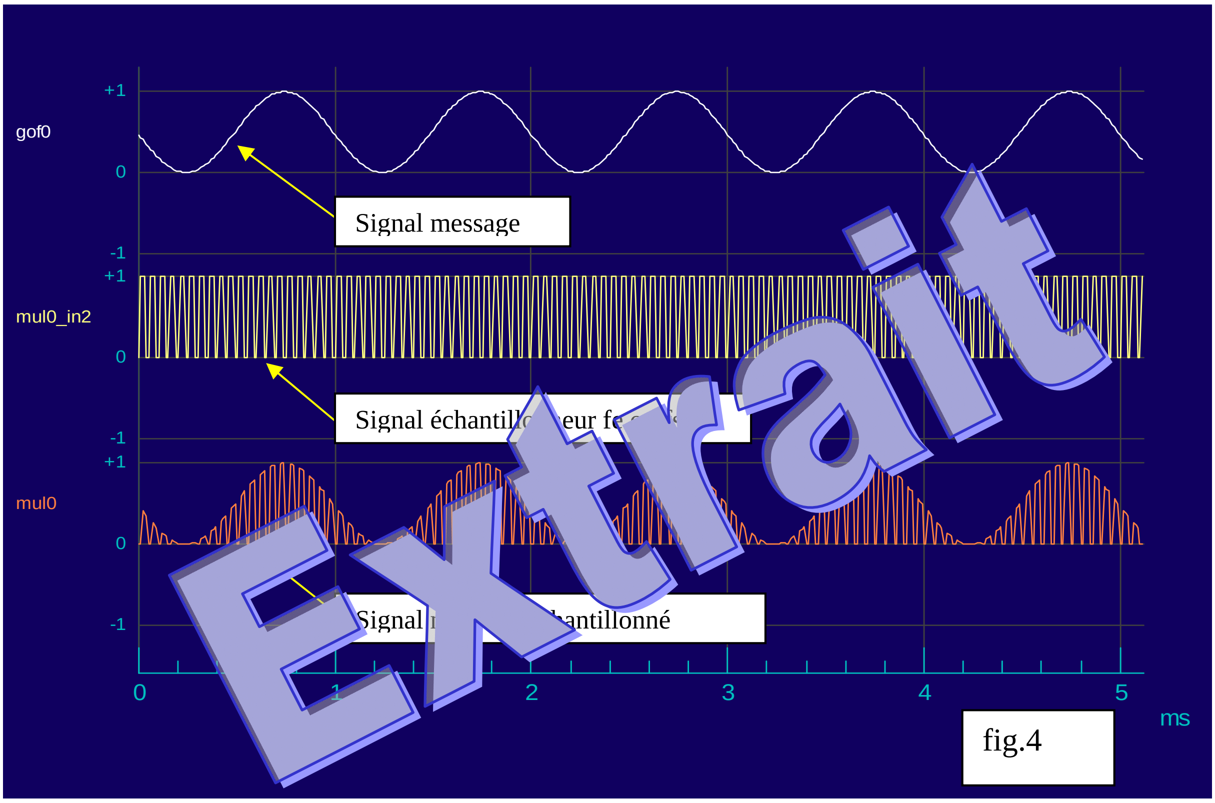


fig.4

Signal message : sinusoïde pure

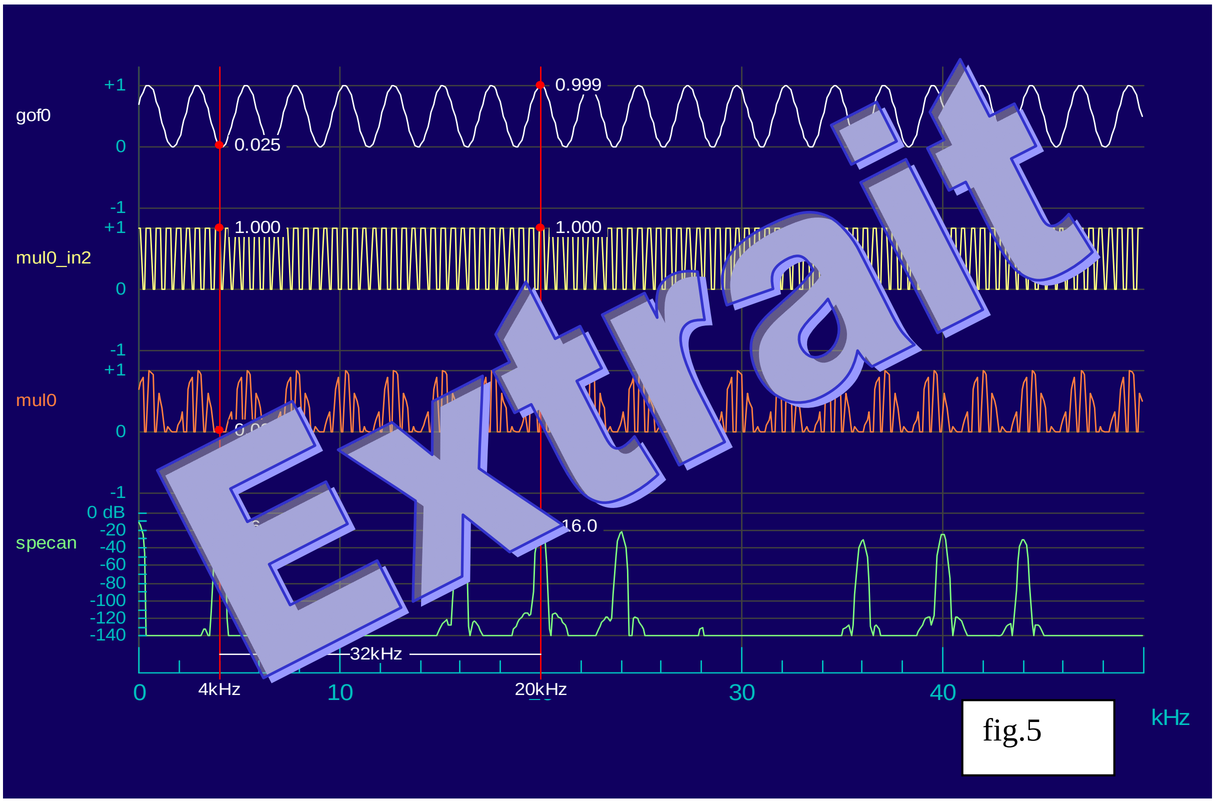


fig.5

Spectre du message échantillonné : fs = 20kHz fm = 4kHz

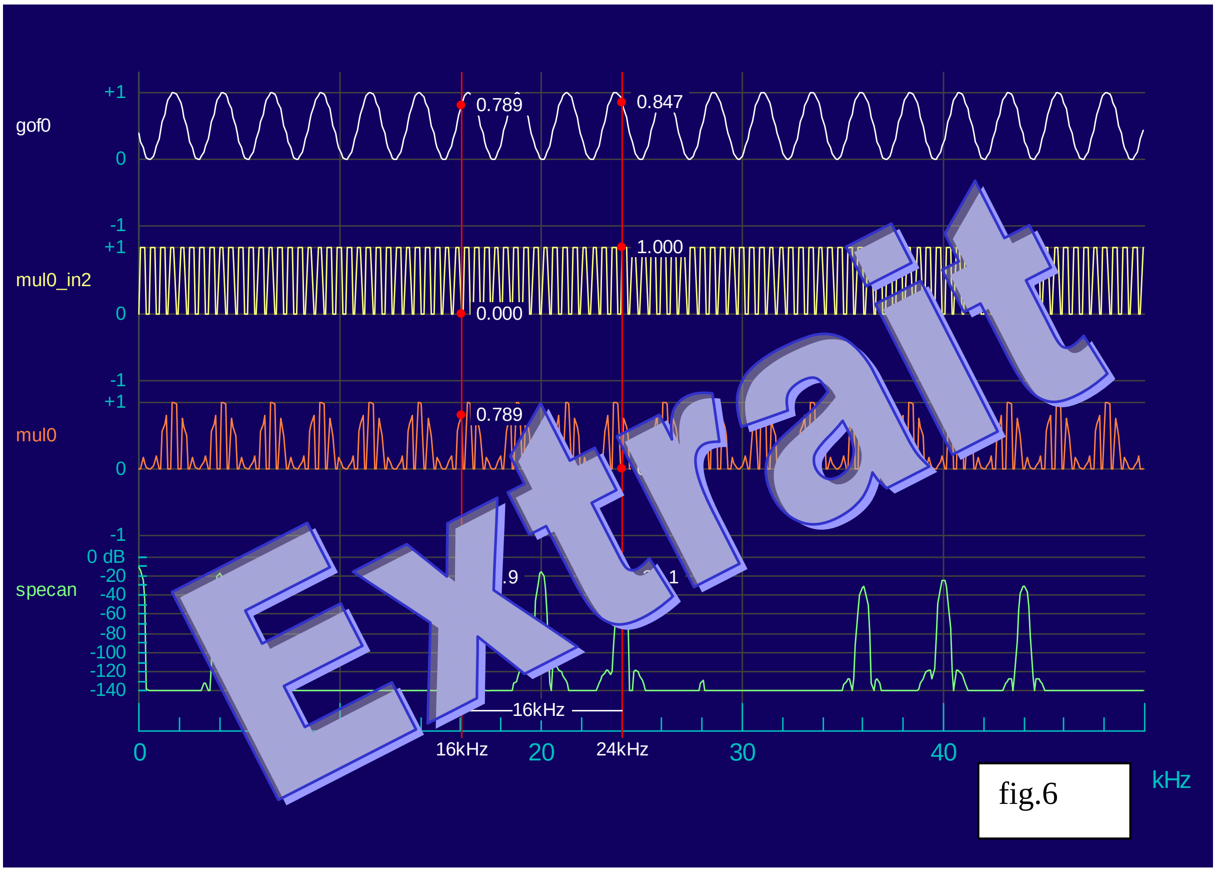


fig.6

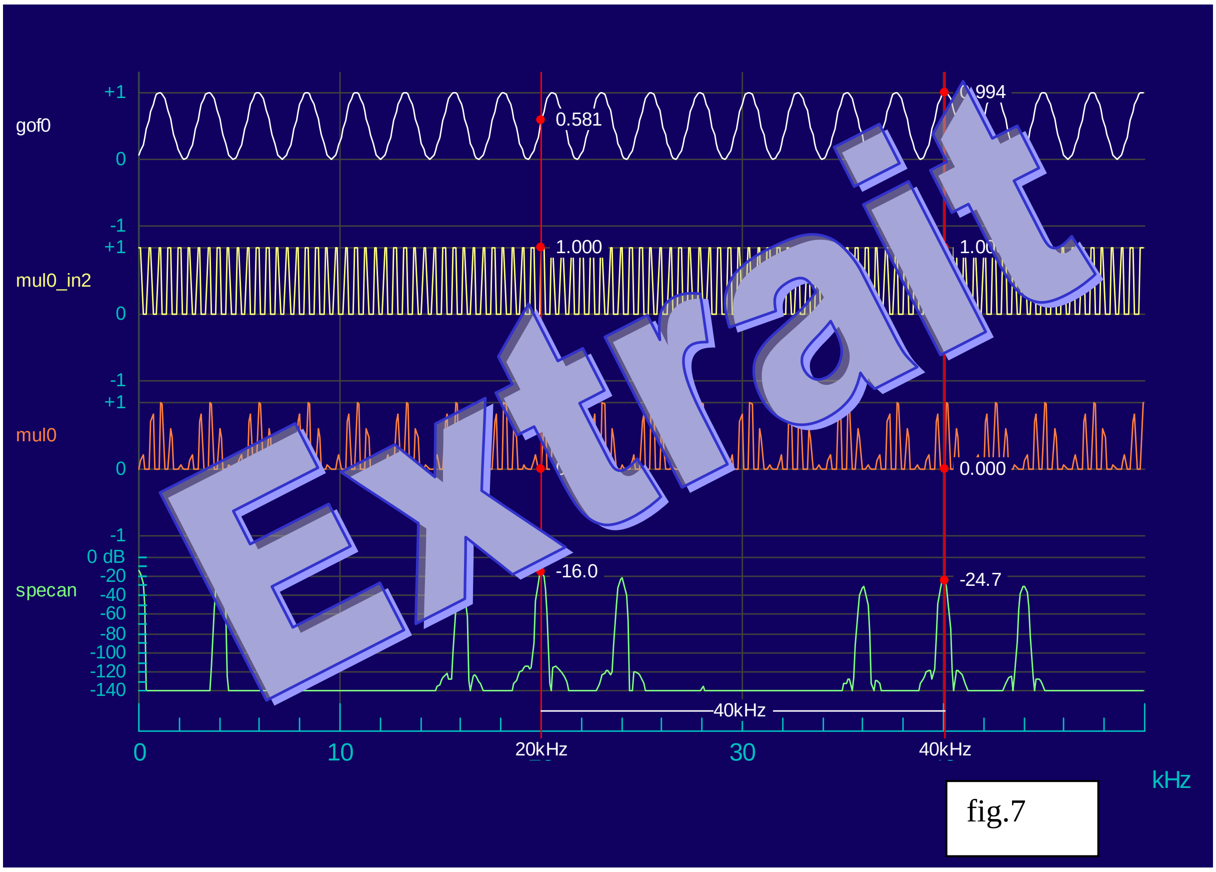


fig.7

Spectre : fm,   fs-fm, n.fs, fs+fm, répété tous les fs soit : 20kHz, 40 kkHz

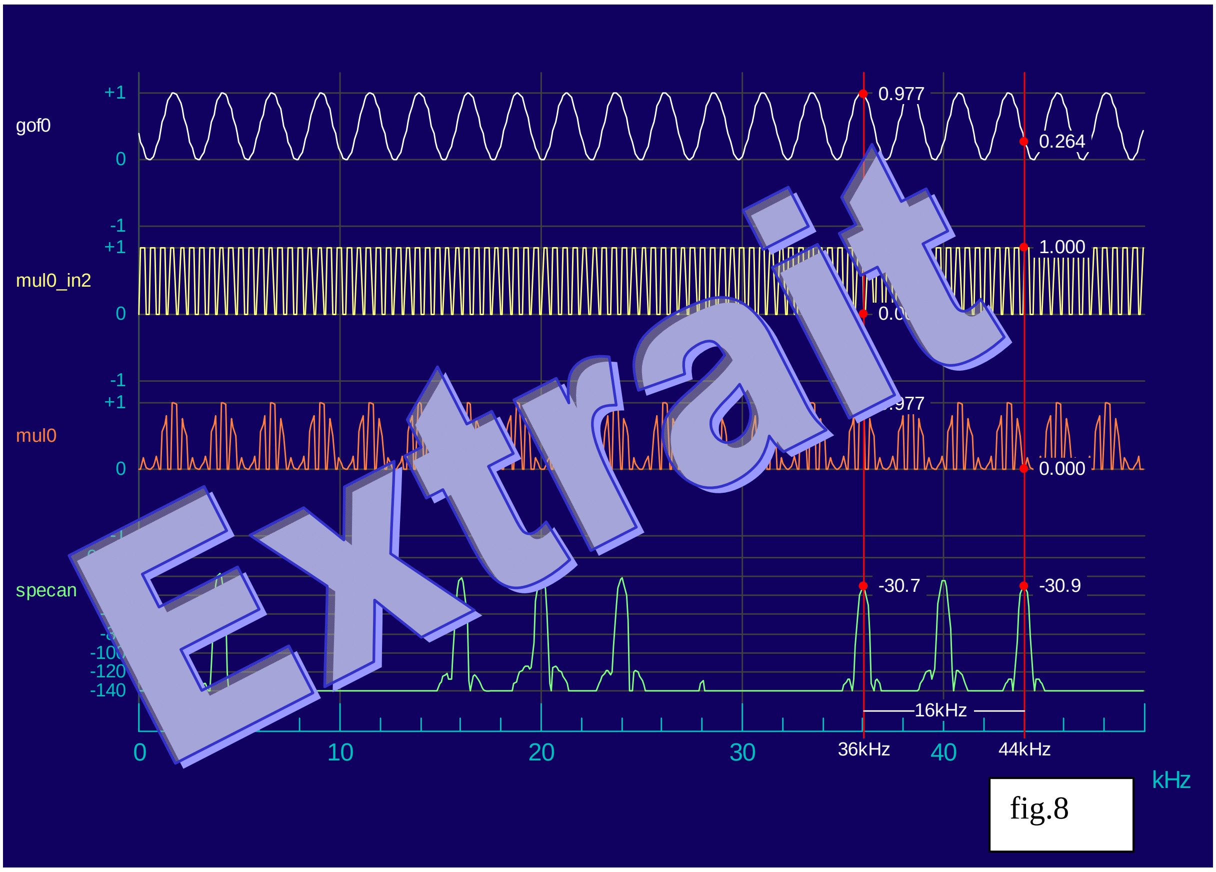

gof0
mul0_in2
mul0
specan
+1
0
-1
0.977
0.264
1.000
0.000
-30.7
-30.9
-100
-120
-140
16kHz
0
10
20
30
36kHz
40
44kHz
kHz

fig.8

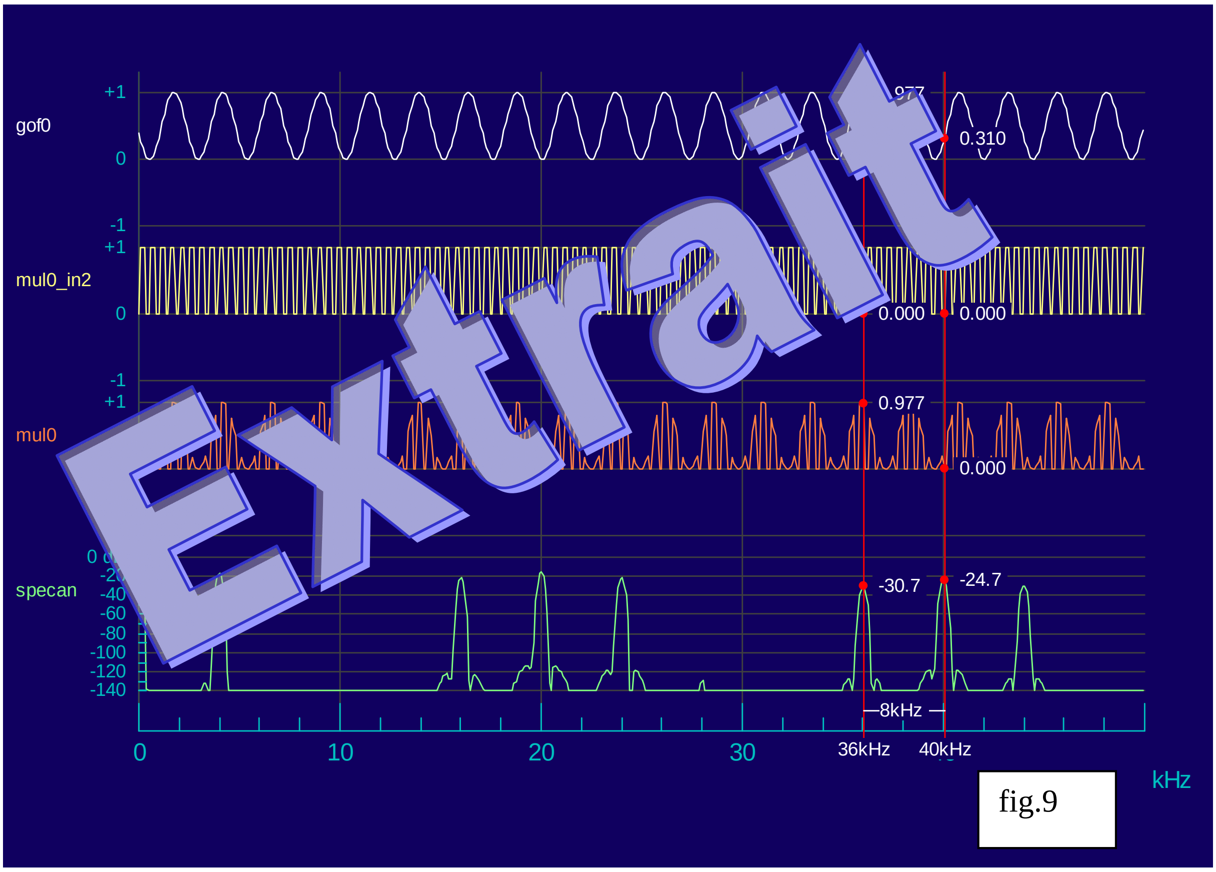

gof0
mul0_in2
mul0
specan
+1
0
-1
0.310
0.000
0.977
-40
-60
-80
-100
-120
-140
-30.7
-24.7
8kHz
0
10
20
30
36kHz
40kHz
kHz

fig.9

Spectre d'un signal échantillonné ou échantillonné/bloqué

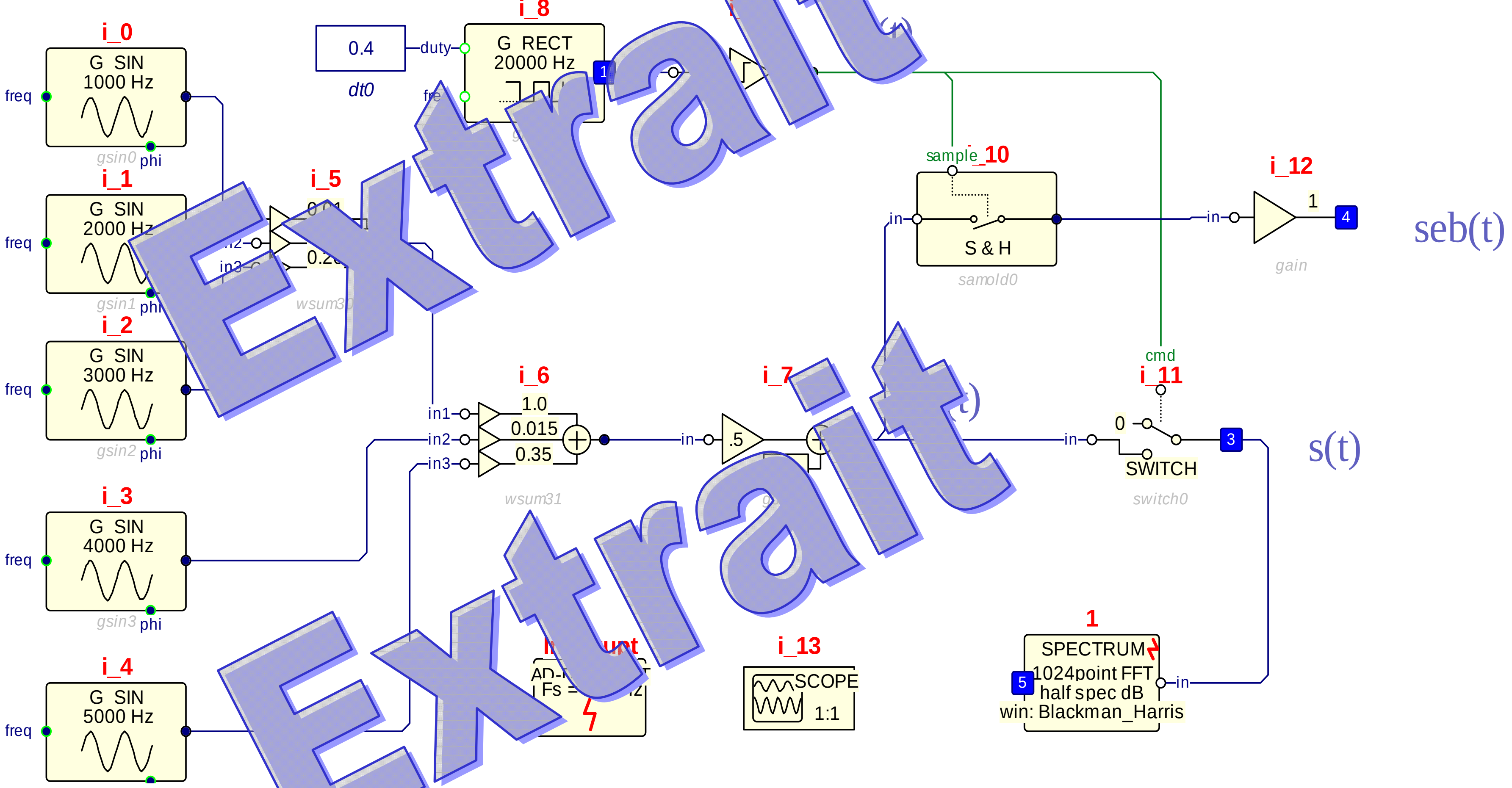


fig.10

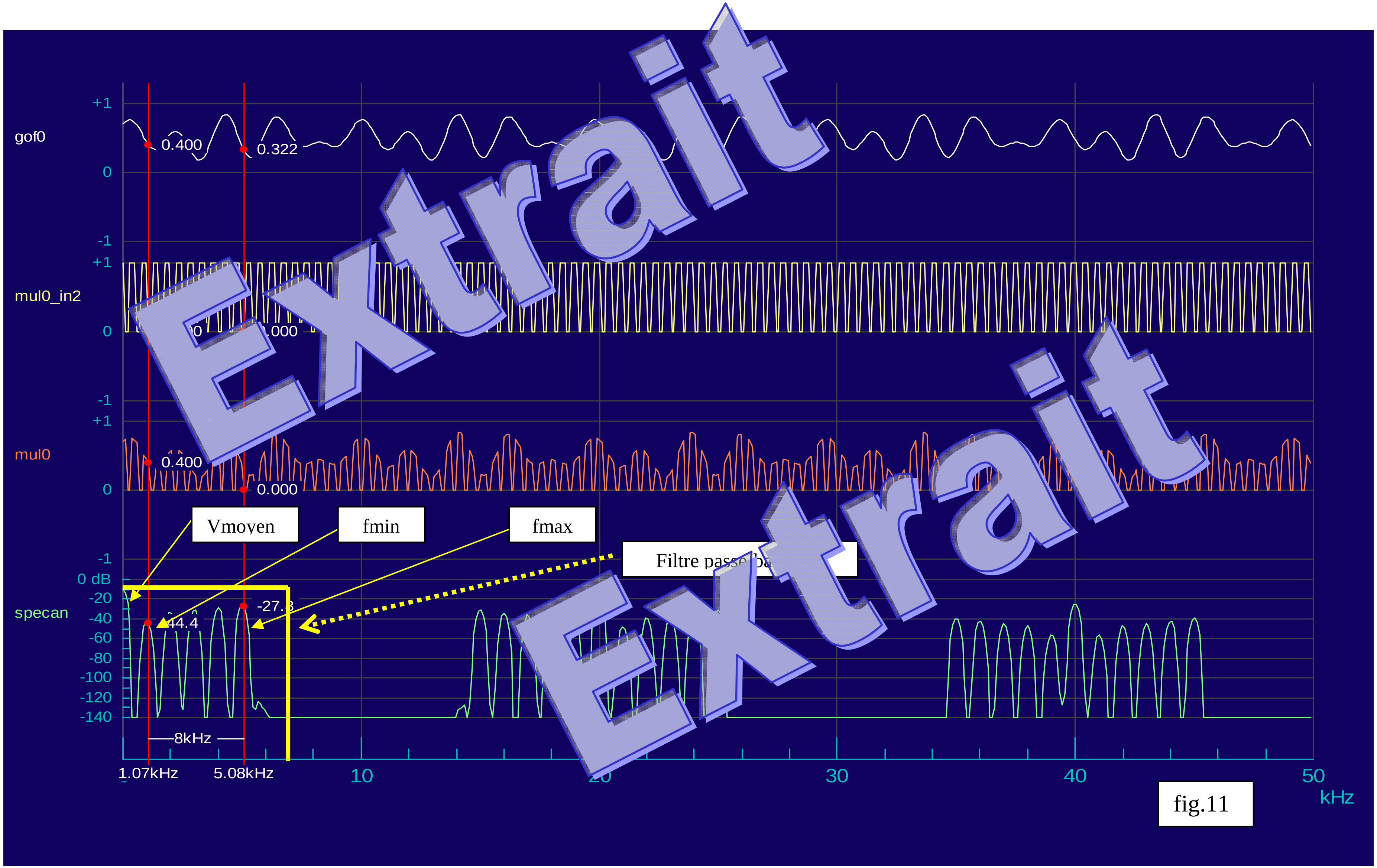


fig.11

Spectre du signal message échantillonné : fmin = 1kHz ; fmax = 5kHz ; repliement mais pas de recouvrement de spectre

Spectre d'un signal échantillonné ou échantillonné bloqué : sepectre variable

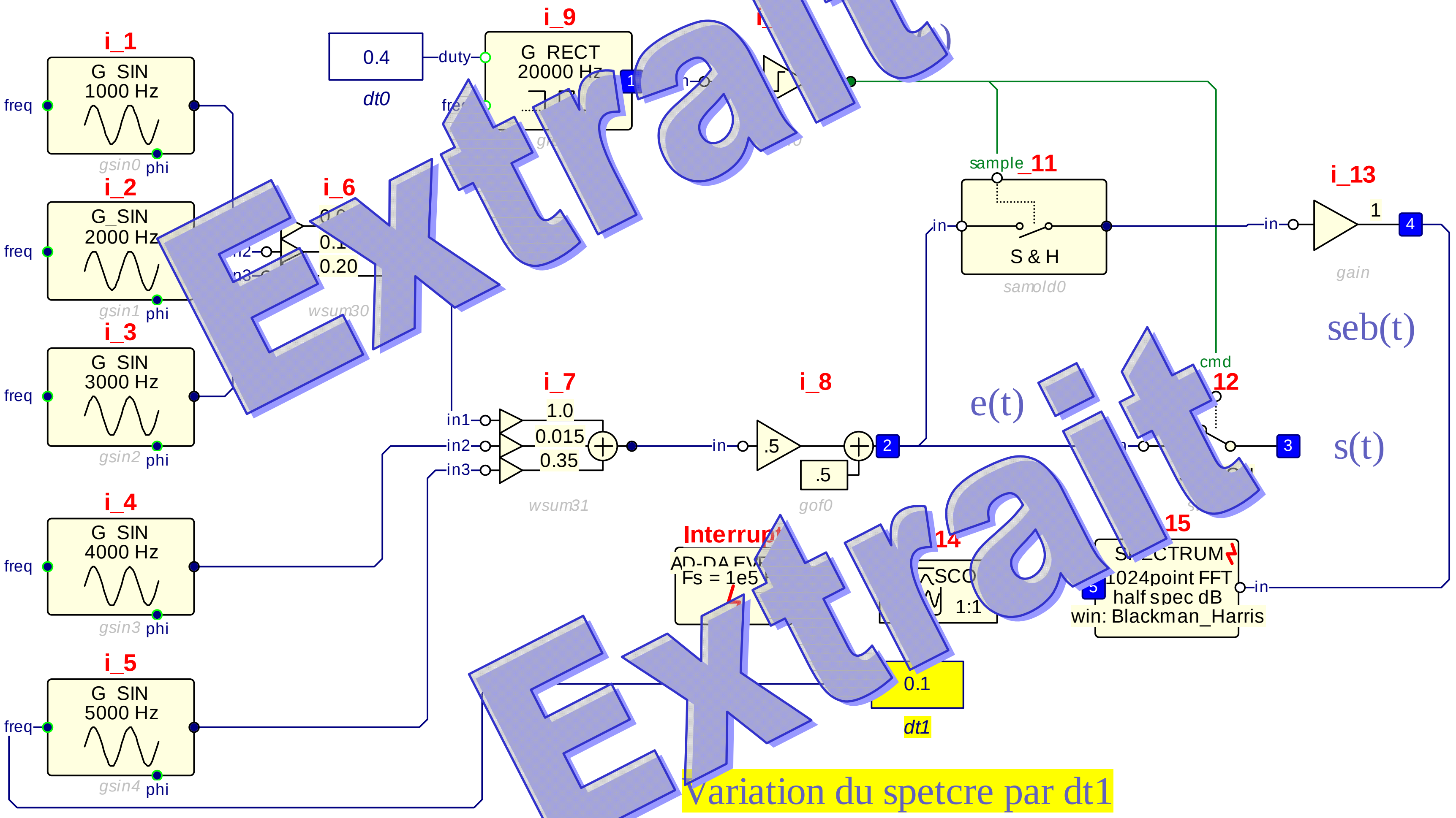


fig.12

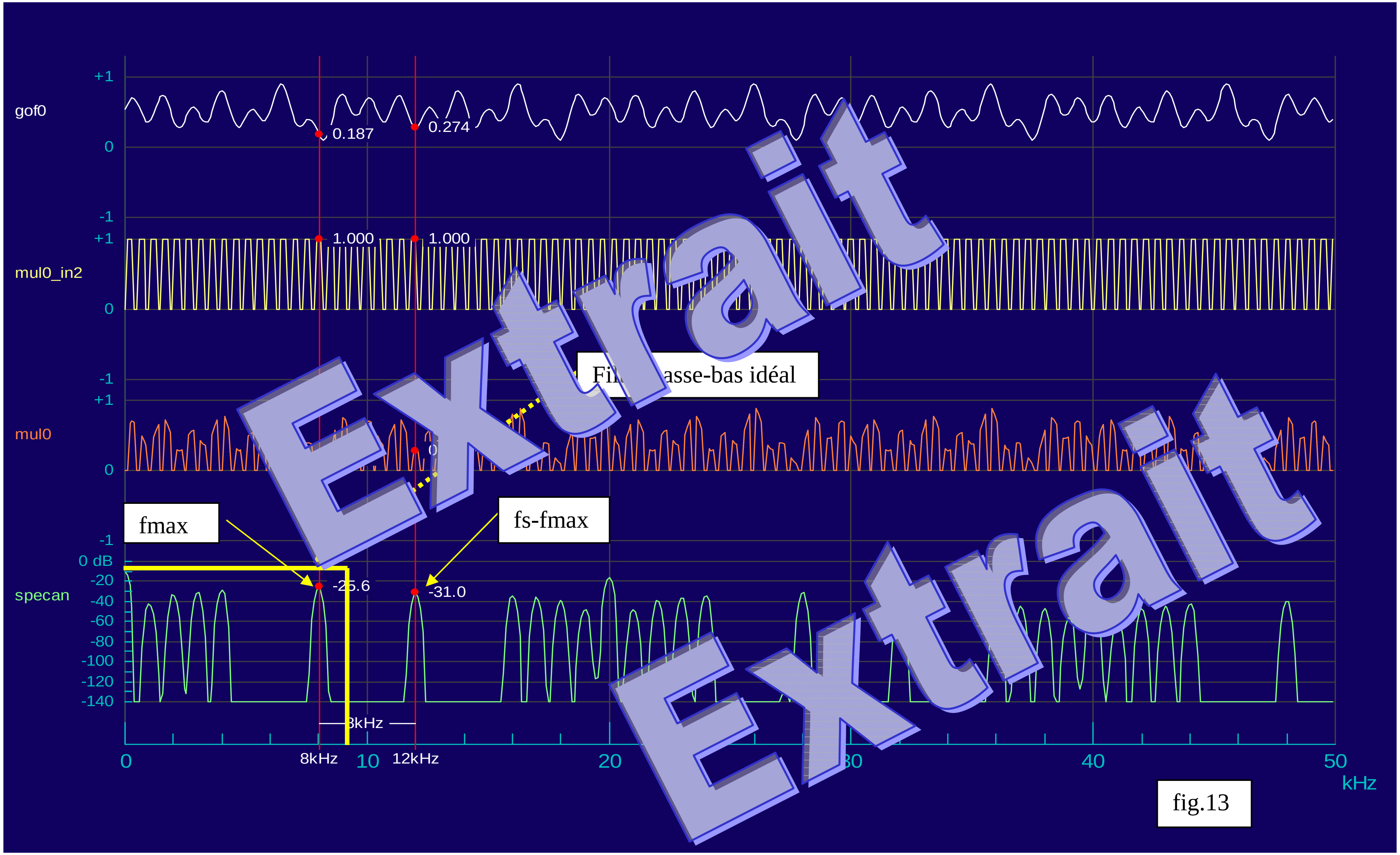
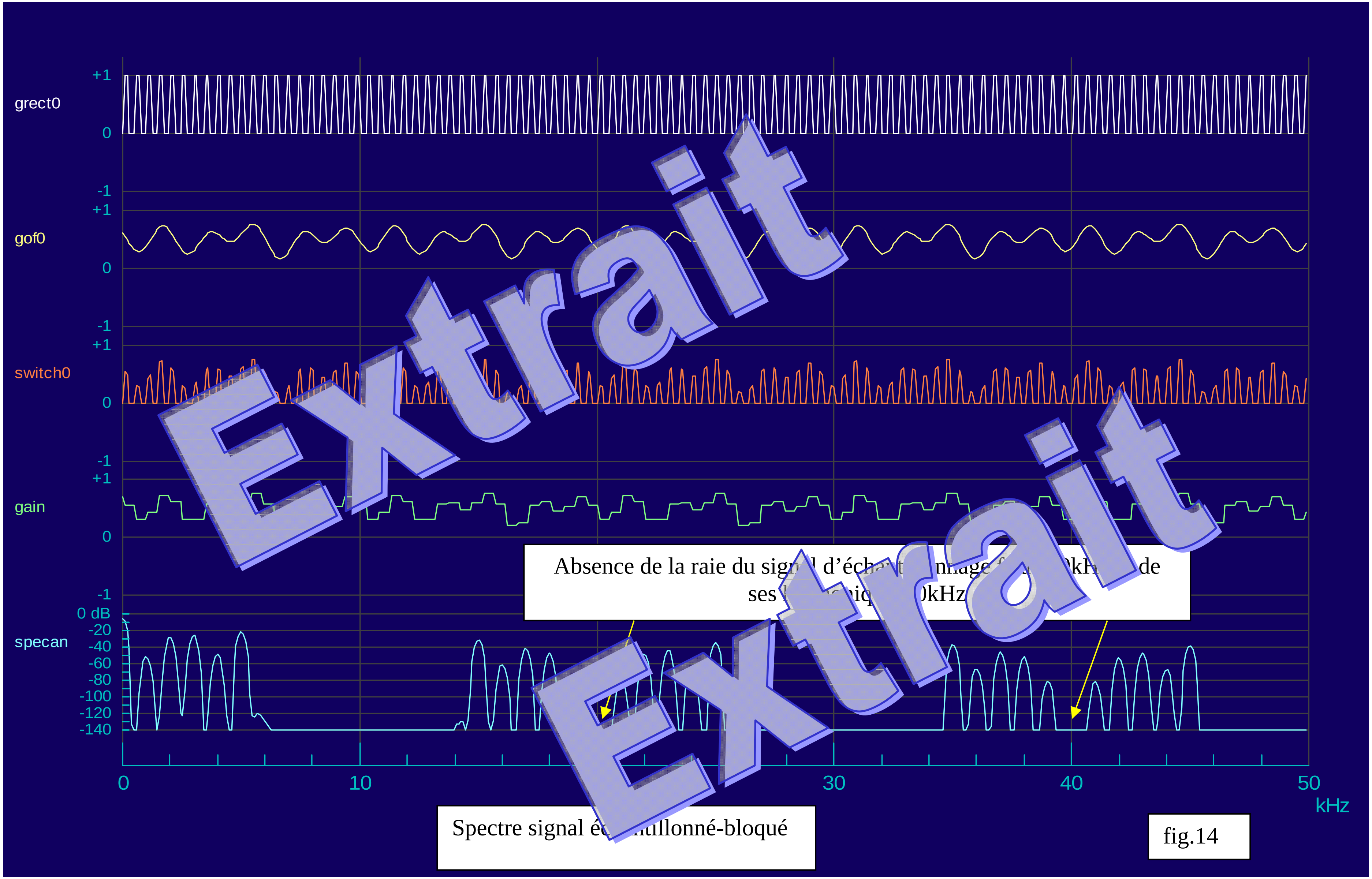


fig.13

fmax =8kHz ➔ fmax < fp-fmax ➔ fmax < fp-fmax ; repliement mais pas de recouvrement de spectre. Message récupérable



Absence de la raie du signal d’échantillonnage f[illegible]0kH[illegible] de ses harmoniques [illegible]0kHz

Spectre signal échantillonné-bloqué

fig.14

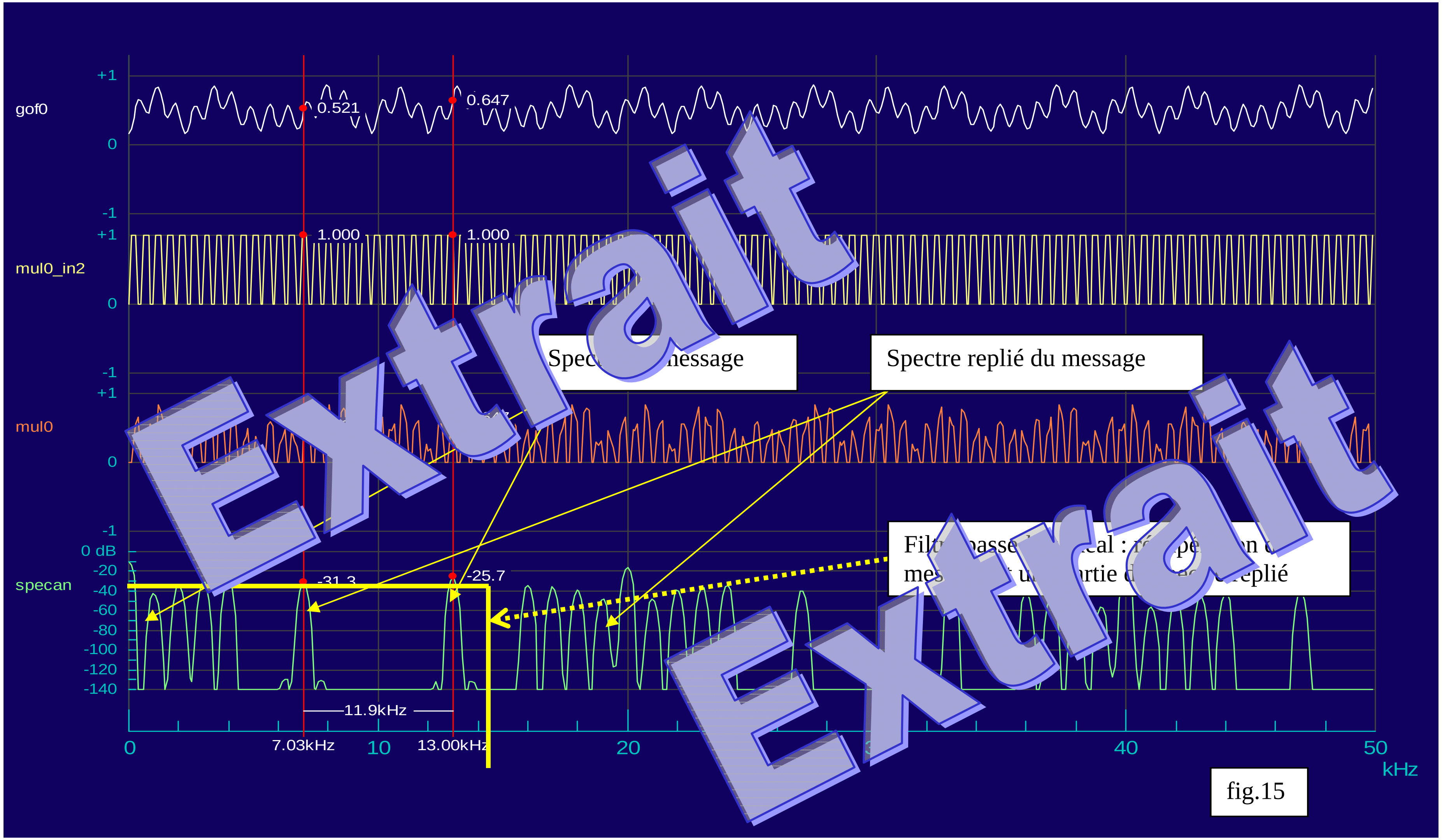


fig.15

fmax = 13Khz ➔ fmax > fs-fmax = 7kHz➔ donc recouvrement de spectre ; le filtre passe-bas récupère aussi une partie du spectre replié

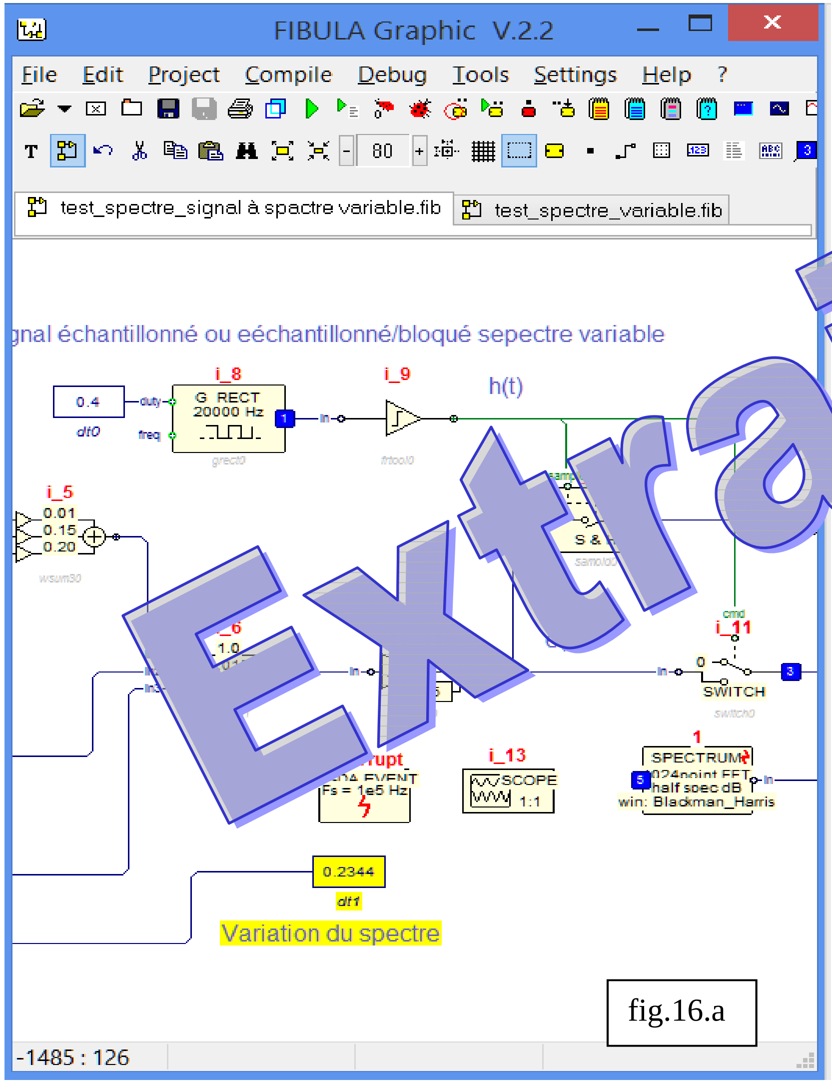


fig.16.a

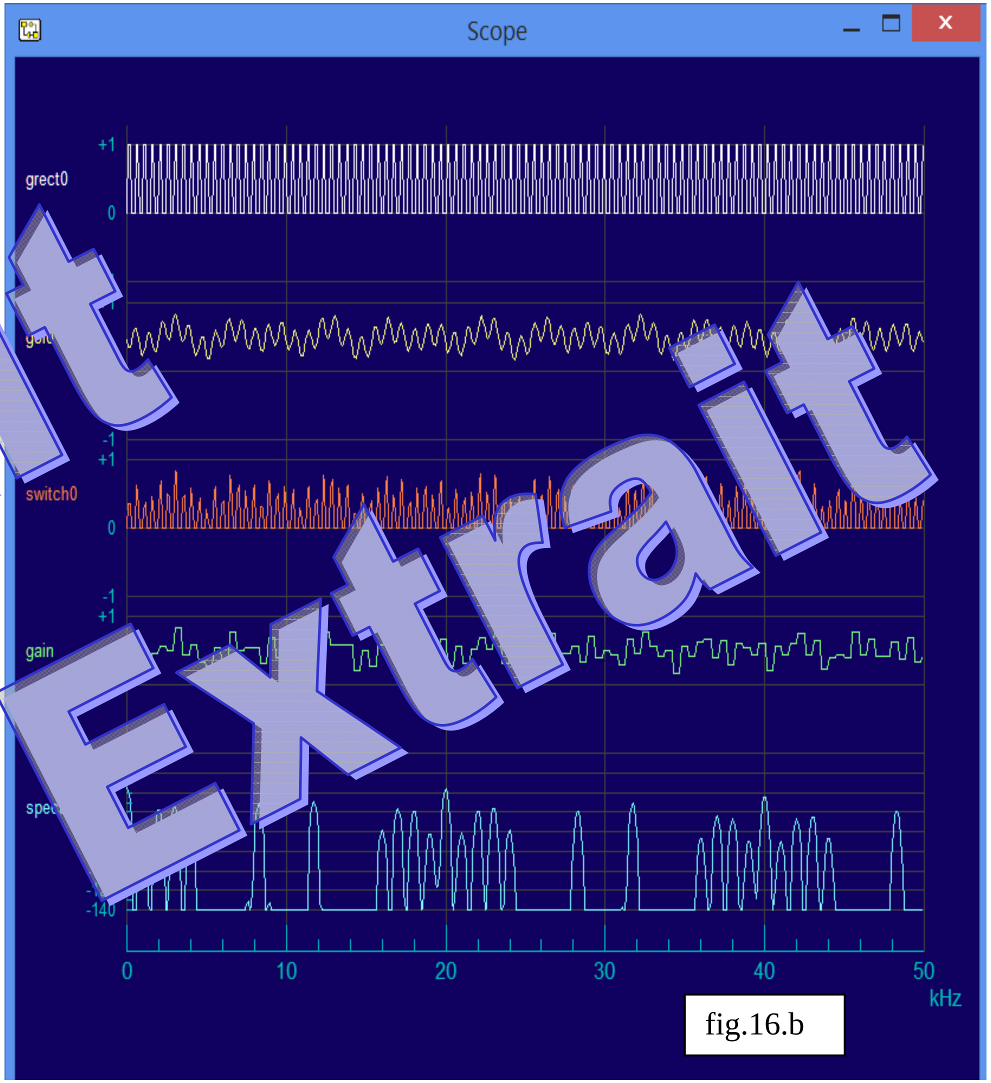


fig.16.b

fig.16